Devoir maison n° 10 - Correction

Exercice 1. (*d'après E3A PC 21*)

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Il s'agit d'une suite alternée et la suite $\big(|u_n|\big)_n = (1/n)_n$ est décroissante et de limite nulle. Ainsi d'après $\boxed{\text{le critère spécial des séries alternées}}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge.

2. Démontrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n \colon x \mapsto x^{2n}(1-x)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0\,;1]$ donc intégrable sur cet intervalle et a fortiori sur $]0\,;1[$.
- Pour $x \in\,]0\,;1[$, la série géométrique $\sum x^{2n}$ est convergente donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}(1-x) = \frac{\cancel{1-x}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} = \frac{1}{1+x}$.
- La fonction somme $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue (par morceaux) sur $]0\,;1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 |f_n| = \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n} - x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} - 0 = \frac{(2n+2)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Or $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'où, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum \int_0^1 |f_n|$ converge.

Ainsi, $\boxed{\text{d'après le théorème de convergence terme à terme}}$, la fonction somme $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est intégrable sur $]0\,;1[$ (pour le savoir on n'avait pas besoin de ce gros théorème !) et surtout

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.$$

3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\psi\colon x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

On va discuter suivant la valeur de x.

- Si $|x| < 1$, on a $\left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n} \leqslant |x|^n$ (car $n \geqslant 1$). Comme $|x| < 1$, la série géométrique $\sum |x|^{n+1}$ est convergente donc par comparaison de séries à termes positifs, $\psi(x)$ est bien défini.
- Si $|x| > 1$, on a $\left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées (car $|x| > 1$). En particulier la série $\sum(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ est grossièrement divergente donc $\psi(x)$ n'est pas défini.
- Pour $x = 1$, on reconnaît la série étudiée en Q1, $\psi(1)$ est donc bien défini (étant donné la question suivante, on pouvait s'en douter).
- Enfin, pour $x = -1$, on a $(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n}$. On reconnaît le terme général de la série harmonique qui est divergente donc ψ n'est pas définie en -1.

Bilan : la fonction $\boxed{\psi \text{ est définie sur }]-1\,;1]}$.

4. À l'aide la question 2, calculer $\psi(1)$.

Remarque : 1 se trouve bien dans le domaine de définition obtenu à la question précédente, calculer $\psi(1)$ a bien du sens[1].

D'après les calculs effectués en Q2, on a vu que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x \right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}. \qquad (\diamondsuit)$$

Idée : *L'intégrale de droite est facile à calculer et la somme de gauche va correspondre à $\psi(1)$. On travaille à cran fini pour ne pas avoir de problème de divergence.*

Soit $N \in \mathbb{N}$. On sépare les termes pairs et impairs en remarque que $(-1)^{k+1}$ vaut 1 si k est impair et -1 si k est pair :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2N+2} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2N+2} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+2} && \textit{$k = 2n+1$ si k impair et $k = 2n+2$ si k pair} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right). && \textit{linéarité} \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, ce qui est légal car la série de départ converge par Q1, on obtient

$$\psi(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \overset{(\diamondsuit)}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \Big[\ln|1+x| \Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \boxed{\ln 2}.$$

1. En particulier, si à la question 3, vous avez trouvé un ensemble de définition ne contenant pas 1, l'énoncé de cette question doit vous inciter à corriger votre réponse.

Exercice 2. (*d'après CCINP TSI 2024*)
On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Remarquons tout d'abord que l'application est bien définie car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[0\,;1]$.

- *Symétrie* : Pour $(P,Q) \in E^2$, on a $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{Q(x)P(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \langle Q \mid P \rangle$.
- *Linéarité à gauche* : Soient $(P_1, P_2, Q) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P_1 + P_2 \mid Q \rangle &= \int_0^1 \frac{(\lambda P_1(x) + P_2(x))Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^1 \frac{P_1(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{P_2(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \qquad \textit{linéarité de l'intégrale} \\
&= \lambda \langle P_1 \mid Q \rangle + \langle P_2 \mid Q \rangle.
\end{aligned}$$

- *Linéarité à droite* : Découle de la linéarité à gauche et de la symétrie.
- *Positivité* : Soit $P \in E$. On a $\langle P \mid P \rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{(P(x))^2}{1+x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive.
- *Caractère défini* : Soit $P \in E$ tel que $\langle P \mid P \rangle = 0$. D'après le calcul précédent cela signifie que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(P(x))^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi la fonction $x \mapsto \dfrac{(P(x))^2}{1+x}$ est continue, positive et d'intégrale nulle donc nécessairement pour tout $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{(P(x))^2}{1+x} = 0$, *i.e.* $\forall x \in [0\,;1]$, $P(x) = 0$. Par conséquent le polynôme P admet une infinité de racines (tout les réels de l'intervalle $[0\,;1]$) donc il s'agit du polynôme nul.

Finalement, $\boxed{\langle \cdot \mid \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

2. Les vecteurs 1 et X sont-ils orthogonaux pour ce produit scalaire ?

On a

$$\begin{aligned}
\langle 1 \mid X \rangle &= \int_0^1 \frac{1 \times x}{1+x}\,\mathrm{d}x \qquad \textit{+1 − 1 au numérateur puis simplification} \\
&= \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[x - \ln|1+x|\Big]_0^1 \\
&= 1 - \ln 2 \neq 0,
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{les vecteurs 1 et } X \text{ ne sont pas orthogonaux}}$.

3. On note $L(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Justifier l'existence de deux réels α et β tels que $L(X^2) = \alpha X + \beta$.

En tant que projeté d'un vecteur sur $\mathbb{R}_1[X]$, on a $L(X^2) \in \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$. Autrement dit $\boxed{L(X^2) \text{ s'écrit } \alpha X + \beta \text{ avec } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2}$.

4. Que peut-on dire du polynôme $X^2 - L(X^2)$ par rapport à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$? En déduire que (α, β) vérifie

$$\int_0^1 \frac{x^2 - \alpha x - \beta}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3 - \alpha x^2 - \beta x}{x+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

- En tant que projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, on a $\boxed{X^2 - L(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]^\perp}$. (Faire un dessin.)
- Comme $(1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, on a $X^2 - L(X^2) \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$ si et seulement si ce vecteur est orthogonal à 1 et à X, ce qui équivaut à

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \langle X^2 - L(X^2) \mid 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - L(X^2) \mid X \rangle = 0 \end{cases}
&\overset{\text{Q3}}{\iff} \begin{cases} \langle X^2 - \alpha X - \beta \mid 1 \rangle = 0 \\ \langle X^2 - \alpha X - \beta \mid X \rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2 - \alpha x - \beta) \times 1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2 - \alpha x - \beta) \times x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \\
&\iff \int_0^1 \frac{x^2 - \alpha x - \beta}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3 - \alpha x^2 - \beta x}{x+1}\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 3. ★ (*à l'origine oral X-ENS PC mais il n'y avait pas les questions 2 et 3.*)

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels. On suppose que la série de terme général a_n est absolument convergente. On considère $F\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[1\,;+\infty[$.

Pour tout l'exercice, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n\colon x \mapsto \dfrac{a_n}{x^n}$ et on note $I = [1\,;+\infty[$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, par décroissance de f_n sur I, on a $\|f_n\|_\infty = |a_n|$. Comme la série $\sum |a_n|$ est supposée convergente, $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement et donc uniformément sur } I}$.
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I (fonction usuelle à dénominateur qui ne s'annule pas sur I).

Par $\boxed{\text{théorème de continuité des séries de fonctions}}$, on en déduit que F est définie et continue sur I.

2. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} F$. En déduire que si F est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ alors $a_0 = 0$.

- On a :
  - f_0 est constante égale à a_0 donc $\ell_0 = \lim\limits_{+\infty} f_0 = a_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ell_n = \lim\limits_{+\infty} f_n = 0$;
  - d'après la question précédente, la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur I et $+\infty$ est une borne de I.

Ainsi, d'après $\boxed{\text{le théorème de la double limite}}$, $\boxed{\lim\limits_{+\infty} F = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = a_0}$.

- Supposons que $a_0 \neq 0$. Comme $\lim\limits_{+\infty} F = a_0 \neq 0$, on a $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_0 = \frac{a_0}{x^0}$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^0}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (Riemann), par équivalence de fonctions de signe constant, F n'est pas intégrable en $+\infty$.

Par contraposition, on obtient que $\boxed{\text{si } F \text{ est intégrable sur } I \text{ alors } a_0 = 0}$.

Pour la suite, on se place dans le cas où $a_0 = 0$.

3. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

Notons S la fonction dont on cherche à montrer l'intégrabilité.

- Pour tout $n \geqslant 2$, $f_n\colon x \mapsto \frac{a_n}{x^n}$ est intégrable sur I (Riemann).
- La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ converge normalement (par Q1) donc simplement sur I.
- La fonction somme S est continue (par morceaux) sur I car elle vaut $F - f_1$ (F est continue sur I par Q1 et f_1 est continue sur I en tant que fonction usuelle).
- Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\int_1^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = |a_n| \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = |a_n| \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^{+\infty} = |a_n|\Big(0 - \frac{1}{-n+1}\Big) = \frac{|a_n|}{n-1} \overset{(n\geqslant 2)}{\leqslant} |a_n|.$$

  Comme par hypothèse $\sum |a_n|$ est convergente, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \int_1^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente.

D'après le $\boxed{\text{théorème d'intégration terme à terme}}$, on en déduit que la fonction somme $S = F - f_1$ est intégrable sur I.

4. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction F soit intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

   D'après la question Q2, pour que F soit intégrable sur I, il faut nécessairement $a_0 = 0$. Sous cette condition, d'après la question précédente, la fonction $F - f_1$ est intégrable sur I. Par conséquent F est intégrable sur I si et seulement si f_1 l'est.
   Or $f_1 \colon x \mapsto \frac{a_1}{x}$ mais $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ (Riemann). D'où f_1 est intégrable sur I si et seulement si $a_1 = 0$.
   Finalement, pour que F soit intégrable sur I, il faut $a_0 = a_1 = 0$. La réciproque est immédiate d'après la question précédente. La condition nécessaire et suffisante recherchée est donc $\boxed{a_0 = a_1 = 0}$.